

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO

Maja Grujić

# **Doo-Sabinova subdivizijska shema**

DIPLOMSKO DELO

UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI PROGRAM PRVE STOPNJE  
RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

MENTOR: doc. dr. Marjetka Krajnc

Ljubljana 2014



Rezultati diplomskega dela so intelektualna lastnina avtorja. Za objavlanje ali izkoriščanje rezultatov diplomskega dela je potrebno pisno soglasje avtorja, Fakultete za računalništvo in informatiko ter mentorja.

*Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil  $\text{\LaTeX}$ .*



Fakulteta za računalništvo in informatiko izdaja naslednjo nalogo:

Tematika naloge:

V delu diplomskega seminarja predstavite Doo-Sabinovo subdivizijsko shemo za konstrukcijo parametričnih ploskev. Opišite povezavo pravil za določanje točk na posameznih nivojih z bikvadratičnimi zlepci. Shemo implementirajte in ponazorite na nekaj primerih.



## IZJAVA O AVTORSTVU DIPLOMSKEGA DELA

Spodaj podpisana Maja Grujić, z vpisno številko **63100198**, sem avtorica diplomskega dela z naslovom:

*Doo-Sabinova subdivizijska shema*

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelala samostojno pod mentorstvom doc. dr. Marjetke Krajnc,
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela,
- soglašam z javno objavo elektronske oblike diplomskega dela na svetovnem spletu preko univerzitetnega spletnega arhiva.

V Ljubljani, dne 10. septembra 2014

Podpis avtorja:





*Zahvaljujem se mentorici doc. dr. Marjetki Krajnc za izjemno pomoč in podporo pri izdelavi diplomskega dela. Rada bi se zahvalila tudi družini in prijateljem, ki so mi med študijem stali ob strani in me motivirali.*



# Kazalo

Povzetek

Abstract

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Subdivizija B-zlepkov</b>	<b>9</b>
2.1	B-zlepki . . . . .	9
2.2	Subdivizija kvadratičnih B-zlepkov . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Delitev subdivizijskih shem za ploskve</b>	<b>21</b>
3.1	Tip mreže . . . . .	22
3.2	Primarne in dualne sheme . . . . .	24
3.3	Aproksimacijske in interpolacijske sheme . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Doo-Sabinova subdivizijska shema</b>	<b>27</b>
4.1	Shema na regularni mreži . . . . .	29
4.2	Shema na neregularni mreži . . . . .	36



# Seznam uporabljenih kratic

kratica	angleško	slovensko
<b>CAD</b>	Computer Aided Design	Računalniško podprto oblikovanje
<b>CAM</b>	Computer Aided Manufacturing	Računalniško podprta proizvodnja
<b>CAGD</b>	Computer Aided Geometric Design	Računalniško podprto geometrijsko oblikovanje
<b>NURBS</b>	Non Uniform Rational Basis Spline	Neenakomerni racionalni B-zlepki



# Povzetek

Subdivizija je metoda za generiranje gladkih krivulj in ploskev iz danih poligon-skih mrež. Subdivizijsko ploskev generiramo s pomočjo pravil, ki jih imenujemo subdivizijske sheme. Shema začne z začetnim kontrolnim poligonom in v vsakem koraku konstruira finejši poligon, ki je v limiti gladka ploskev, ki se dobro prilega začetnemu kontrolnemu poligonu. Pravila za konstrukcijo finejšega poligona se od sheme do sheme razlikujejo, zato imamo različne kriterije za klasifikacijo subdivizijskih shem.

V diplomskem delu je predstavljena Doo-Sabinova shema, ki temelji na bikvadratičnih B-zlepkih. Cilj diplomskega dela je poiskati povezavo med bikvadratičnimi B-zlepki in pravili za določanje novih točk kontrolnega poligona. Shema je za regularna vozlišča implementirana v okolju Matlab, za neregularna vozlišča pa praktično prikazana.

**Ključne besede:** Doo, Sabin, subdivizija, subdivizijska shema, subdivizijske ploskve, kvadratični B - zleпки, bikvadratični B - zleпки.





# Abstract

Subdivision is a method of representing a smooth curve or a surface. The subdivision process begins with a polygonal mesh. Refinement rules are then applied to this mesh and in a limit a smooth surface is produced. There is a variety of existing subdivision schemes, that can be classified based on different criteria. In this work Doo-Sabin subdivision scheme for surfaces is presented, which is connected to bi-quadratic B-splines. The aim is to find this connection and to practically present the scheme for regular and irregular vertices. Doo-Sabin scheme for regular vertices is also implemented in Matlab environment.

**Keywords:** Doo, Sabin, subdivision, subdivision scheme, subdivision surfaces, quadratic B-spline, biquadratic B-spline.



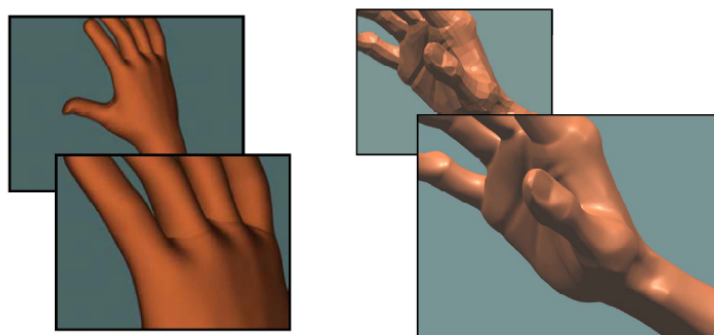
# Poglavje 1

## Uvod

Geometrijsko modeliranje je veja uporabne matematike in računalniške geometrije, ki preučuje metode in algoritme za matematični opis oblik. Te oblike so večinoma dvo- ali tridimenzionalne. Tridimenzionalni modeli so pomembni v računalniško podprtem oblikovanju in modeliranju (CAD/CAM) in pogosto uporabljeni na tehničnih področjih, kot so gradbeništvo, strojništvo, arhitektura, geologija in medicinska obdelava slik. Pomembno podpodročje geometrijskega modeliranja je računalniško podprto geometrijsko oblikovanje (CAGD), ki je tesno povezano z računalniško grafiko. Ukvarja se z algoritmi za zasnovo gladkih krivulj in ploskev ter z njihovo učinkovito matematično predstavitevjo. Ideja za generiranje gladkih ploskev s pomočjo subdivizije se je pojavila v letu 1978, ko sta bila objavljena dva pomembna članka. Prvega sta objavila Catmull in Clark ([4]), drugega pa Doo in Sabin ([6]). Subdivizijske ploskve so danes močno razširjene v računalniški grafiki, na področju računalniških iger in računalniške animacije, kjer morajo biti objekti zelo podobni resničnim objektom in prepričljivi. Pojavljajo se kot alternativa neenakomernim racionalnim B-zlepkom (NURBS) in poligonskemu modeliranju.

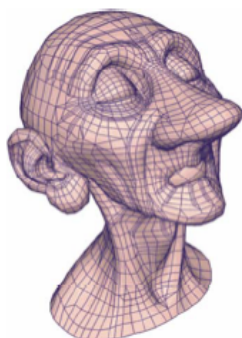
Subdivizijske sheme imajo veliko prednosti pred drugimi metodami za geometrijsko modeliranje. Za njihovo uporabo ne potrebujemo toliko matematičnega znanja. Preproste subdivizijske sheme lahko ustvarijo zanimive oblike, poleg tega pa so tudi učinkovite in dovoljujejo visoko stopnjo nadzora nad obliko ploskve.

Primerjavo med subdivizijsko ploskvijo in NURBS ploskvijo lahko vidimo na sliki



Slika 1.1: Primerjava NURBS ploskve (na levi) in subdivizijske ploskve (na desni). Slika pridobljena iz [2].

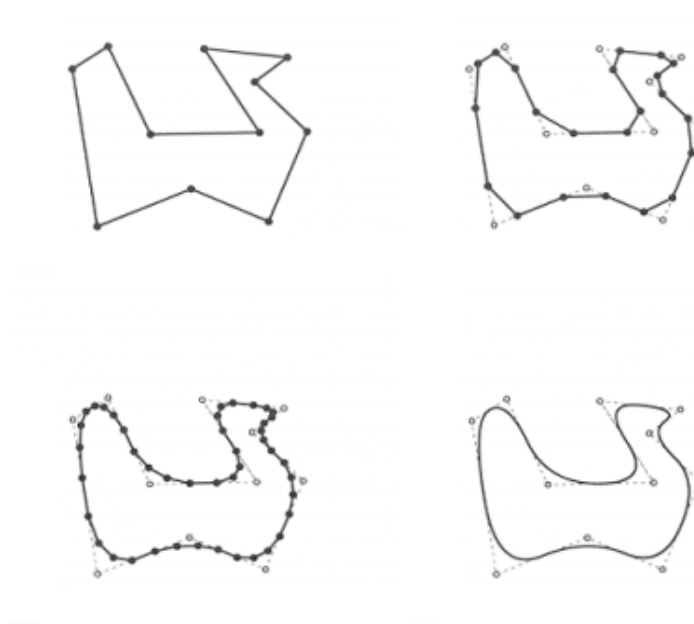
1.1. Na levi strani je prikazana roka Woody-ja iz risanke Toy Story 2, ki je predstavljena z neenakomernimi racionalnimi B-zlepki, na desni strani pa roka Geri-ja iz risanke Geri's game, ki je rezultat subdivizije. Geri's game je animirani film, ki ga je leta 1997 predstavil animacijski studio Pixar. V tem filmu je bila za modeliranje lika prvič uporabljena subdivizija.



Slika 1.2: Glava Geri-ja iz animiranega filma Geri's game. Slika pridobljena iz [2].

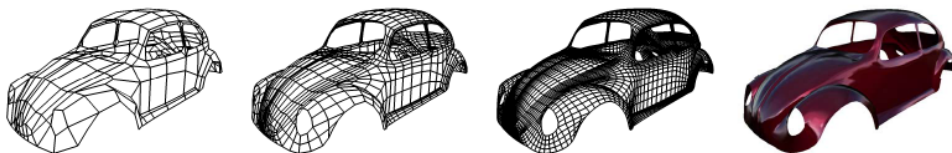
### Ideja subdivizije za krivulje

Pri subdivizijski metodi za krivulje začnemo z množico točk, ki jih imenujemo kontrolne točke. Povezane so v kontrolni poligon, ki je odsekoma linearna krivulja. Naloga je, da matematično predstavimo gladko krivuljo, ki ima podobno obliko kot kontrolni poligon. Gladka krivulja lahko poteka skozi iste točke, ali pa je na kakšen drugačen način blizu kontrolnega poligona. Primer subdivizije za sklenjeno krivuljo je prikazan na sliki 1.3. Začetnemu kontrolnemu poligonu priredimo nove točke in jih spet povežemo med seboj. Na sliki spodaj desno vidimo rezultat postopka subdivizije, ki je v limiti gladka krivulja in se dobro prilega začetnemu kontrolnemu poligonu. Več o subdiviziji za krivulje bo povedanega v naslednjem poglavju diplomskega dela.



Slika 1.3: Primer subdivizije za sklenjeno krivuljo, ki temelji na kvadratičnih B-zlepkih. Slika pridobljena iz [5].

### Ideja subdivizije za ploskve



Slika 1.4: Primer subdivizije za ploskve. Slika pridobljena iz [2].

Subdivizijska metoda za ploskve prične s poligonsko mrežo, ki jo sestavljajo **točke**, **povezave** in **lica**. Število in položaj vozlišč definira poligon. Vozlišča imenujemo **kontrolne točke**. Pojem točka označuje položaj, vozlišče pa vlogo znotraj poligona. Metoda opravi določeno število korakov subdivizijskega procesa. En korak subdivizije vodi h konstrukciji izboljšane, finejšega poligona. Ko govorimo o nadaljnjih korakih subdivizije, vhodnemu podatku pravimo **stari** poligon, izhodnemu podatku pa **novi** poligon. Primer vidimo na sliki 1.4.

Oglejmo si sedaj, kaj sta pravzaprav lice in množica povezav lica.

Naj  $V$  označuje množico vseh vozlišč v dani poligonski mreži,  $V = \{v_i\}_i$ . Povezavo med vozliščema  $v_i$  in  $v_j$  označimo z  $\{v_i, v_j\}$  ali krajše z  $e_{ij}$ . Množica vseh povezav naj bo označena z  $E$ . **Stopnja** vozlišča je enaka številu vseh povezav, ki si dano vozlišče delijo.

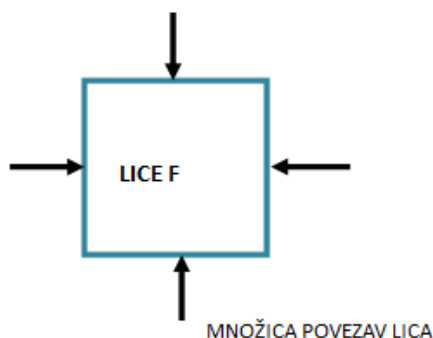
**Definicija 1.1** *Lice*  $F = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$  je končen nabor točk različnih vozlišč, kjer so  $v_{i_j} \in V$  za  $j = 1, 2, \dots, k$  in je

$$E_F = \{\{v_{i_1}, v_{i_2}\}, \{v_{i_2}, v_{i_3}\}, \dots, \{v_{i_{k-1}}, v_{i_k}\}, \{v_{i_k}, v_{i_1}\}\} \in E.$$

Množico  $E_F$  imenujemo **množica povezav lica**. Lice je opredeljeno tudi z naborem, v katerem so vozlišča v nasprotnem vrstnem redu in z nabori, pridobljenimi s ciklično permutacijo elementov katerega od teh dveh naborov.

Število povezav lica se lahko spreminja glede na lice, vendar predpostavimo, da so povezave vsaj 3.

Tukaj smo definirali samo en indeks za množico  $V$ , ki označuje vozlišča. Vozlišča pa so bolj naravno indeksirana na druge načine, na primer s parom celih števil  $(k, l)$ , ki označujeta mrežno točko v ravnini.



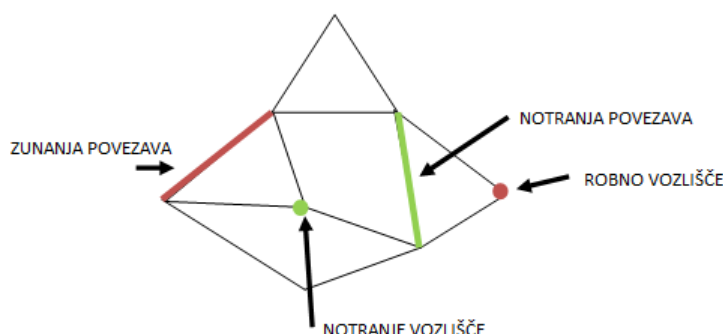
Slika 1.5: Lice in množica povezav lica.

**Definicija 1.2** Povezava  $\{v_i, v_j\}$  v mreži je **notranja** povezava, če pripada vsaj dvema licema. V nasprotnem primeru je **zunanja** ali **robna** povezava. **Rob** mreže je množica vseh robnih povezav. Če je prazna, imamo mrežo brez roba. **Notranje** vozlišče je vozlišče, ki ni na robni povezavi. V nasprotnem primeru je vozlišče **zunanje** ali **robno**.

V sistemih prostorskega modeliranja je model običajno razdeljen na dva dela. Prvi del je **logična** ali **topološka** informacija, ki pove, kako so določeni deli (vozlišča, povezave, lica) povezani med seboj in kako se povezanost spreminja. K logični mreži dodamo **geometrijsko** informacijo, ki definira, kje so določeni deli dejansko postavljeni v evklidski prostor.

**Definicija 1.3** **Logična mreža** je končna zbirka vozlišč, lic in pripadajočih množic povezav. Pogosto se srečujemo z logičnimi mrežami, ki so sestavljene iz trikotnih ali štirikotnih lic.

**Definicija 1.4** Če je  $M$  logična mreža in  $P$  pripadajoča matrika kontrolnih točk, je par  $\mathcal{M} = (M, P)$  **poligonska** mreža.



Slika 1.6: Tipi vozlišč in povezav.

Subdivizijska pravila so napisana v načinu, ki uporablja linearno kombinacijo vozlišč starega poligona za izračun koordinat vozlišč novega poligona v vsakem koraku subdivizije. Obstajajo štirje načini, kako lahko gledamo na utežene koeficiente, ki definirajo, kako se subdivizijska shema obnaša: šablona, subdivizijska matrika, maska in generatorska funkcija. Osredotočili se bomo na **subdivizijsko šablono** in **subdivizijsko matriko**. Množica uteži v linearni kombinaciji se imenuje subdivizijska šablona. Množica šablon skupaj je popoln opis enakomerne, stacionarne sheme. Pri **enakomerni** subdivizijski shemi se na celotni poligonski mreži uporabi ista šablona (isto pravilo), pri **neenakomerni** subdivizijski shemi pa lahko uporabimo različne šablone na različnih delih poligonske mreže.

**Stacionarna** shema pomeni, da je enaka šablona (pravilo) uporabljena pri vsakem koraku subdivizije pri glajenju poligona. Pri **nestacionarni** shemi pa lahko uporabimo različne šablone za vsak korak subdivizije. Šablone lahko sestavimo v subdivizijsko matriko, s katero pomnožimo vektor starih vozlišč, da dobimo vektor novih. Šablone so vidne kot vrstice matrike. Kjer je shema enakomerna, iste šablone alternirajo po matriki.

V diplomskem delu bo predstavljena Doo-Sabinova subdivizijska shema za ploskve, algoritem pa bo tudi praktično prikazan v okolju MATLAB. Najprej si bomo ogledali, kaj so B-zlepki, natančneje kvadratični in bikvadratični B-zlepki, ki so osnova Doo-Sabinove sheme. V tretjem poglavju si bomo podrobneje ogledali sheme za ploskve in delitev shem glede na različne kriterije. V zadnjem poglavju



pa bomo podrobno predstavili Doo-Sabinovo shemo.



## Poglavje 2

# Subdivizija B-zlepkov

Pogost pristop k načrtovanju krivulj in ploskev temelji na obstoju družine gladkih funkcij  $B_m$  s kompaktnim nosilcem, ki se imenujejo B-zlepki, kar je okrajšano ime za bazne zlepke. Natančneje jih spoznajmo ter si pogledjmo njihovo povezavo s subdivizijo.

### 2.1 B-zlepki

Vpeljimo vektor  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ ,  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , ki ima  $n + 1$  elementov, ki so nepadajoča realna števila. Elemente vektorja  $T$  imenujemo vozli. Če je med sosednjimi vozli enaka razdalja, torej je razlika  $t_{i+1} - t_i$  konstantna, rečemo, da je vektor vozlov  $T$  enakomeren, sicer pa je neenakomeren. Če je vektor vozlov enakomeren, so tudi B-zlepki nad vektorjem vozlov enakomerni ali kardinalni in bazne funkcije B-zlepkov so samo translacije osnovne bazne funkcije, kar je prikazano na sliki 2.1.



Slika 2.1: Translacije B-zlepkov.

Enakomerni B-zlepki, kjer vektorja vozlov ne omejimo na  $n + 1$  elementov, ampak je vektor kar množica celih števil  $\mathbb{Z}$ , imajo naslednje lastnosti.

- (a) Funkcija  $B_m \in \mathcal{C}^{m-1}(\mathbb{R})$  je odsekoma polinomska funkcija stopnje  $m$  nad zaporedjem vozlov  $\mathbb{Z}$ , ki je  $(m - 1)$ -krat zvezno odvedljiva na  $\mathbb{R}$ . Na vsakem podintervalu  $(i, i + 1)$  je  $B_m$  polinom stopnje  $m$ .
- (b) Zlepek  $B_m$  ima kompaktni nosilec  $[0, m + 1]$ . Znotraj nosilca je zlepek  $B_m$  pozitiven. Torej  $B_m(t) > 0$  za  $t \in [0, m + 1]$ . Za  $t \notin [0, m + 1]$  pa je  $B_m = 0$ .
- (c) Velja, da je  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_m(t - i) = 1$ , za vse  $t \in \mathbb{R}$ , kar pomeni, da je vsota translacij B-zlepka  $B_m$  enaka 1.
- (d) Označimo s  $\pi_m$  prostor vseh polinomov nad  $\mathbb{R}$  stopnje manjše ali enake  $m$ . Velja, da je  $\mathcal{L}\{B_m(t - i) : i \in \mathbb{Z}\} = S_{m, \mathbb{Z}}$ , kjer je

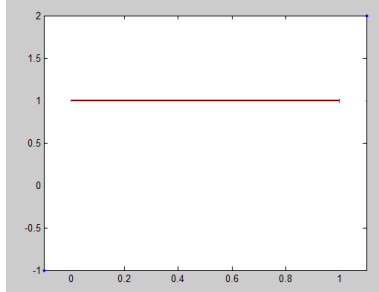
$$S_{m, \mathbb{Z}} = \{f : f \in \mathcal{C}^{m-1}(\mathbb{R}), f|_{(i, i+1)} \in \pi_m, i \in \mathbb{Z}\}$$

prostor funkcij, ki imajo  $m - 1$  zveznih odvodov na množici realnih števil, z omejitvijo, da so na vsakem intervalu  $(i, i + 1)$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , polinomi stopnje  $m$ .

Osnovni konstanten B-zlepek na intervalu  $[0, 1]$  podamo kot funkcijo

$$B_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, \quad (2.1)$$

ki je prikazana na sliki 2.2.

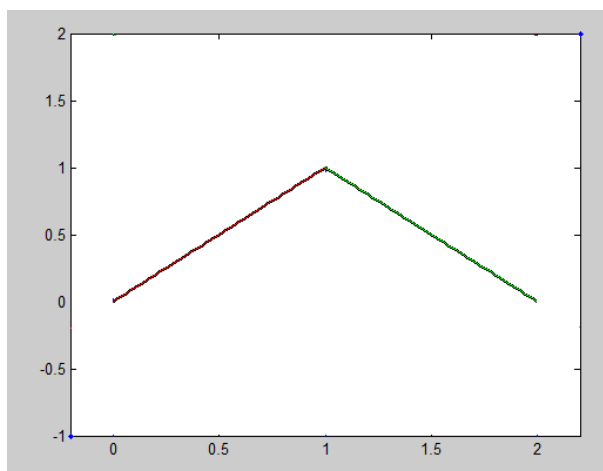


Slika 2.2: Odsekoma konstanten zlepek  $B_0$  na intervalu  $[0, 1]$ .

B-zlepek stopnje 1 z nosilcem na intervalu  $[0, 2]$  pa podamo kot funkcijo

$$B_1(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} \quad (2.2)$$

Prikazan je na sliki 2.3.



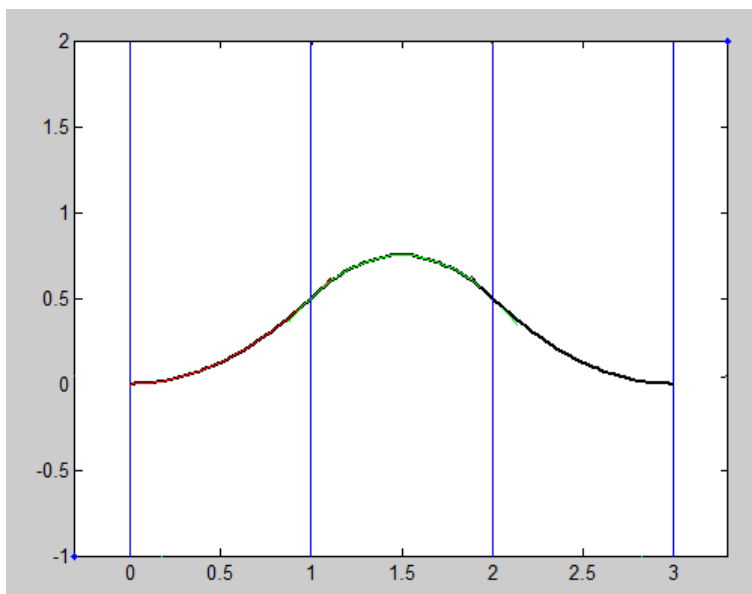
Slika 2.3: Odsekoma linearen zlepek  $B_1$  na intervalu  $[0, 2]$ .

Iz te osnovne funkcije lahko izpeljemo B-zlepke višjih stopenj s pomočjo sledeče relacije:

$$B_{m+1}(t) = \int_{\mathbb{R}} B_0(t-s)B_m(s) ds = \int_{t-1}^t B_m(s) ds. \quad (2.3)$$

Zanima nas kvadratični B-zlepek  $B_2$ , ki je pozitivna, zvezno odvedljiva, odsekoma kvadratična funkcija z nosilcem na intervalu  $[0, 3]$ . Dobimo ga s pomočjo enačbe (2.3) in je enak

$$B_2(t) = \int_{t-1}^t B_1(s) ds = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t < 1 \\ -t^2 + 3t - \frac{3}{2}, & 1 \leq t < 2 \\ \frac{t^2}{2} - 3t + \frac{9}{2}, & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}. \quad (2.4)$$



Slika 2.4: Odsekoma kvadratični zlepek  $B_2$  na intervalu  $[0, 3]$ .

Prikazan je na sliki 2.4.

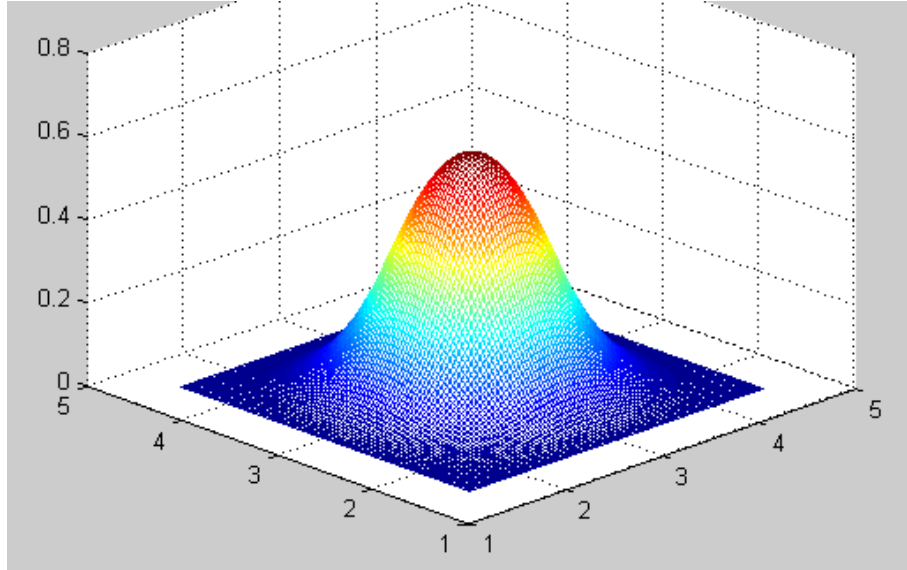
Kvadratični zlepek je zvezno odvedljiva odsekoma polinomska funkcija, ki je enaka linearni kombinaciji transliranih kvadratičnih B-zlepkov, in sicer

$$P_2(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i B_2(t - i), \quad (2.5)$$

kjer so  $p_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z}$  kontrolne točke. Ko kontrolne točke povežemo, dobimo kontrolni poligon točk. Če izberemo kontrolne točke  $p_i \in \mathbb{R}^3, i \in \mathbb{Z}$ , potem je  $P_2$  iz enačbe (2.5) parametrično podana krivulja v  $\mathbb{R}^3$ . Na podoben način lahko definiramo odsekoma polinomske funkcije dveh spremenljivk, ki so na vsakem območju  $(i, i + 1) \times (j, j + 1)$  polinomi dveh spremenljivk. In sicer so oblike

$$S_2(u, v) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_{ij} B_2(u - i) B_2(v - j), \quad (2.6)$$

kjer so  $p_{ij} \in \mathbb{R}, i, j \in \mathbb{Z}$ . Če pa so  $p_{ij} \in \mathbb{R}^3$ , potem predpis predstavlja parametrično podano ploskev, katere komponente so odsekoma polinomske funkcije. Na sliki 2.5 je prikazan osnovni bikvadratični B-zlepek.



Slika 2.5: Bikvadratični B-zlepek.

## 2.2 Subdivizija kvadratičnih B-zlepkov

Kot rečeno v uvodu diplomskega dela, subdivizija za krivulje začne z začetnimi kontrolnimi točkami  $p = \{p_i^0, i \in \mathbb{Z}\}$ . Cilj je iz začetnega kontrolnega poligona dobiti finejši kontrolni poligon. Začnemo s kvadratičnim zlepkom  $P_2 \in S_{2,\mathbb{Z}}$  nad zaporedjem vozlov  $T = \mathbb{Z}$ , kar pomeni, da je krivulja  $P_2$  na vsakem podintervalu  $[i, i+1]$  polinom stopnje 2. Sedaj podinterval razpolovimo in gledamo prostor zlepkov  $S_{2,\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$  nad zaporedjem vozlov  $T = \frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{\frac{i}{2}, i \in \mathbb{Z}\}$ . Vsak element tega prostora mora biti polinom stopnje 2 na vsakem podintervalu  $[\frac{i}{2}, \frac{i+1}{2}]$ . Očitno je krivulja  $P_2$  tudi element tega prostora, saj velja  $S_{2,\mathbb{Z}} \subseteq S_{2,\frac{1}{2}\mathbb{Z}}$ , zato jo lahko zapišemo po bazi novega prostora, ki ga razpenjajo B-zlepki oblike  $B_2(2t - i)$ . In sicer je

$$P_2(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i^0 B_2(t - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i^1 B_2(2t - i), \quad (2.7)$$

kjer so  $p_i^1$  nove kontrolne točke, katerih vrednosti bomo izpeljali v nadaljevanju. Če postopek razpolavljanja nadaljujemo, dobimo

$$P(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i^0 B_2(t - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i^1 B_2(2t - i) = \cdots = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i^k B_2(2^k t - i). \quad (2.8)$$

Na vsakem koraku dobimo nove kontrolne točke, pri čemer točka  $p_i^k$  ustreza mrežni točki  $2^{-k}i$ . Zaporedje kontrolnih poligonov konvergira k prvotnemu kvadratičnemu zlepku. V dokaz se ne bomo spuščali, saj ni trivialen, lahko pa ga bralec najde v virih [13], [7], [18].

Poglejmo si sedaj, kakšne so zveze med kontrolnimi točkami na dveh zaporednih nivojih. V ta namen si najprej pogledimo, kako bi lahko B-zlepek  $B_2$  nad zaporedjem vozlov  $T = \mathbb{Z}$  zapisali po bazi B-zlepkov nad zaporedjem vozlov  $T = \frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{\frac{i}{2}, i \in \mathbb{Z}\}$ . Pri tem nam je v pomoč enačba

$$B_m(t) = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} B_m(2t - k), \quad (2.9)$$

ki je dokazana v viru [23]. Ta enačba pravi, da lahko B-zlepek stopnje  $m$  zapišemo kot linearno kombinacijo njegovih transliranih in skaliranih kopij.

Za kvadratične B-zlepke se (2.9) poenostavi v

$$\begin{aligned} B_2(t) &= \frac{1}{2^2} \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} B_2(2t - k) \\ &= \frac{1}{4} \left( \binom{3}{0} B_2(2t) + \binom{3}{1} B_2(2t - 1) + \binom{3}{2} B_2(2t - 2) + \binom{3}{3} B_2(2t - 3) \right) \\ &= \frac{1}{4} (B_2(2t) + 3B_2(2t - 1) + 3B_2(2t - 2) + B_2(2t - 3)) \\ &= \frac{1}{4} B_2(2t) + \frac{3}{4} B_2(2t - 1) + \frac{3}{4} B_2(2t - 2) + \frac{1}{4} B_2(2t - 3). \end{aligned} \quad (2.10)$$

S pomočjo (2.4) se lahko z malo računanja prepričamo, da je desna stran enačbe (2.10) enaka levi.

Sedaj bomo s pomočjo enačb (2.7) in (2.10) izpeljali relacijo med koeficienti  $p_i^0$  in  $p_i^1$  za primer kvadratičnih B-zlepkov.

Naj bo kvadratični zlepek enak

$$P_2(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i^0 B_2(t - i).$$



V predpis vstavimo (2.10), poenostavimo in dobimo

$$\begin{aligned}
P_2(t) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i^0 \left( \frac{1}{4} B_2(2(t-i)) + \frac{3}{4} B_2(2(t-i)-1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{4} B_2(2(t-i)-2) + \frac{1}{4} B_2(2(t-i)-3) \right) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{4} p_i^0 B_2(2t-2i) + \frac{3}{4} p_i^0 B_2(2t-2i-1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{4} p_i^0 B_2(2t-2i-2) + \frac{1}{4} p_i^0 B_2(2t-2i-3) \right).
\end{aligned}$$

Vsak člen zapišemo pod svojo vsoto in dobimo

$$\begin{aligned}
P_2(t) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{4} p_i^0 B_2(2t-2i) \right) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left( \frac{3}{4} p_i^0 B_2(2t-2i-2) \right) \\
&\quad + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left( \frac{3}{4} p_i^0 B_2(2t-2i-1) \right) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{4} p_i^0 B_2(2t-2i-3) \right).
\end{aligned}$$

Sedaj izvedemo menjavo indeksa v drugi in četrti vsoti ( $i \rightarrow j-1$ ):

$$\begin{aligned}
P_2(t) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{4} p_i^0 B_2(2t-2i) \right) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \frac{3}{4} p_{j-1}^0 B_2(2t-2j) \right) \\
&\quad + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left( \frac{3}{4} p_i^0 B_2(2t-2i-1) \right) + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{4} p_{j-1}^0 B_2(2t-2j-1) \right).
\end{aligned}$$

Vsote z enakimi B-zlepki združimo pod skupno vsoto, od koder sledi

$$P_2(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{4} p_i^0 + \frac{3}{4} p_{i-1}^0 \right) B_2(2t-2i) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left( \frac{3}{4} p_i^0 + \frac{1}{4} p_{i-1}^0 \right) B_2(2t-2i-1).$$

Po (2.7) je

$$P_2(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_{2i}^1 B_2(2t-2i) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_{2i+1}^1 B_2(2t-2(i+1)). \quad (2.11)$$

Od tod dobimo pravila za določanje kontrolnih točk v vsakem naslednjem koraku subdivizije kvadratičnih B-zlepkov. Imamo različni pravili za sode in lihe točke.

Pravilo za sode točke:

$$p_{2i}^{k+1} = \frac{3}{4}p_{i-1}^k + \frac{1}{4}p_i^k \quad (2.12)$$

Pravilo za lihe točke:

$$p_{2i+1}^{k+1} = \frac{1}{4}p_{i-1}^k + \frac{3}{4}p_i^k \quad (2.13)$$

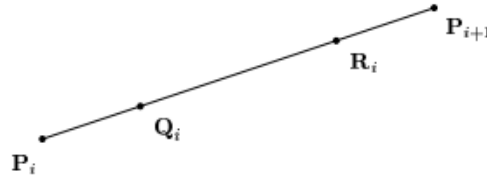
Subdivizijska shema za krivulje, ki temelji na kvadratičnih B-zlepkih je znana tudi kot Chaikinov algoritem. V letu 1974 je George Chaikin predstavil zanimivo idejo za generiranje krivulje iz končnega zaporedja točk. Algoritem je bil eden izmed prvih postopkov 'rezanja kotov'. Vsako povezavo  $\{P_i, P_{i+1}\}$  začetnega poligona  $\{P_0, P_1, \dots, P_{n-1}\}$ , kjer so  $P_i \in \mathbb{R}^3$ , razdelimo v razmerju  $\frac{1}{4}$  in  $\frac{3}{4}$  (kar je prikazano na sliki 2.6) in generiramo novo zaporedje kontrolnih točk

$$\{Q_0, R_0, Q_1, R_1, \dots, Q_{n-1}, R_{n-1}\},$$

kjer  $Q_i$  in  $R_i$  lahko zapišemo z enačbami

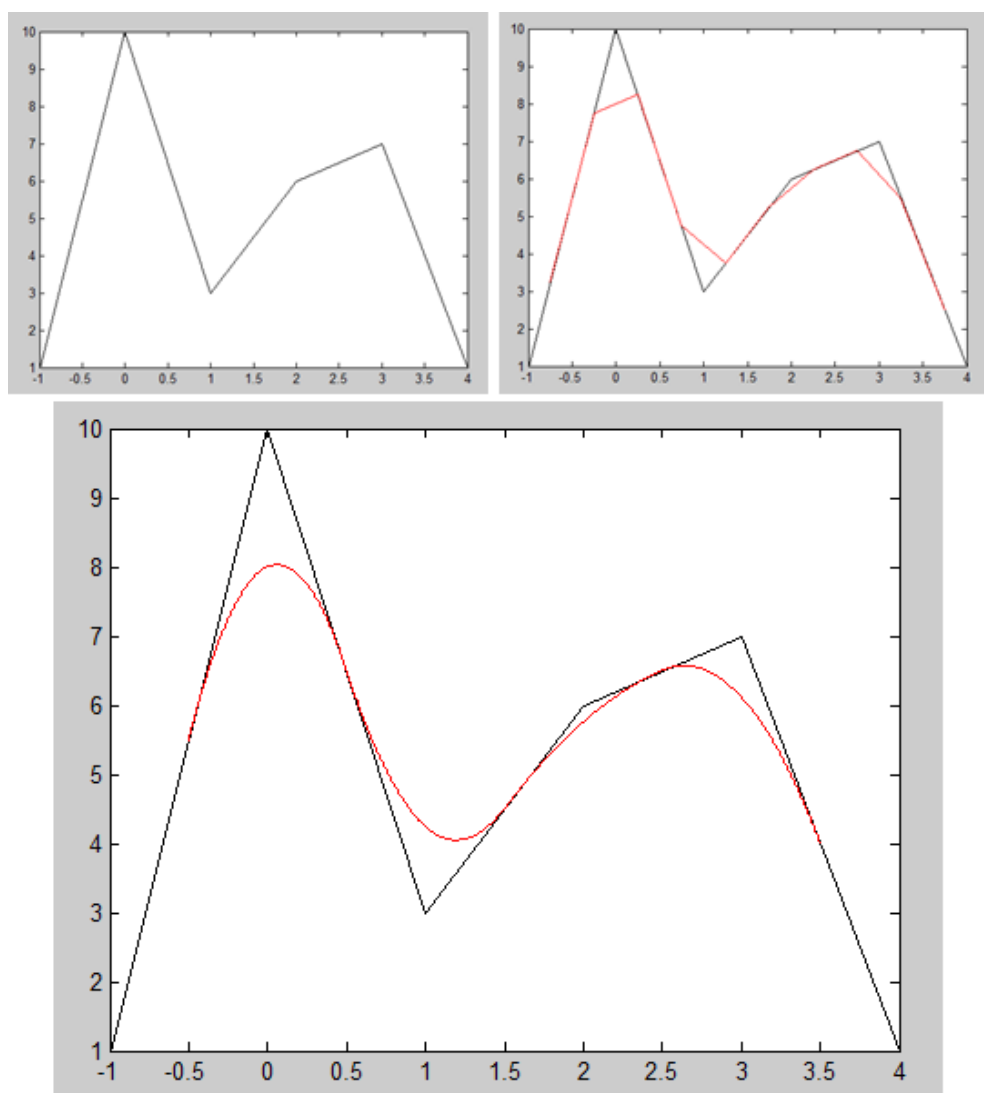
$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{3}{4}P_i + \frac{1}{4}P_{i+1} \\ R_i &= \frac{1}{4}P_i + \frac{3}{4}P_{i+1}. \end{aligned}$$

Vidimo, da so enačbe enake kot enačbe za kontrolne točke kvadratičnih B-zlepkov. Limitna krivulja Chaikinovega algoritma je zato krivulja kvadratičnih B-zlepkov.

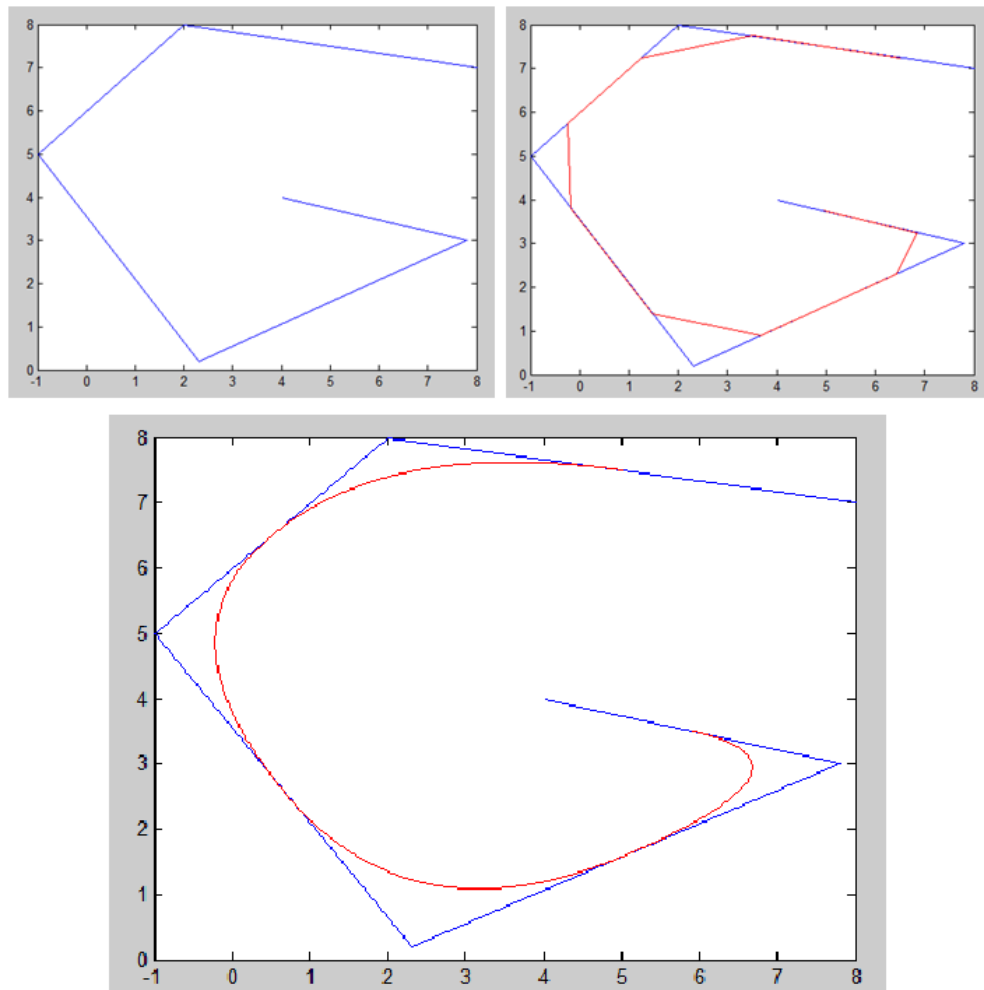


Slika 2.6: Deljenje povezave pri Chaikinovem algoritmu. Pridobljeno iz [10].

V okolju MATLAB je napisan postopek za subdivizijo, ki temelji na kvadratičnih B-zlepkih nad ekvidistantnim zaporedjem vozlov. Razlikujemo med funkcijskim primerom, pri katerem je začetni kontrolni poligon odsekoma linearna krivulja, ki povezuje točki  $(i, p_i^0)$  in  $(i+1, p_{i+1}^0)$  za  $i \in \mathbb{Z}$ . Na  $k$ -tem koraku pa so točke kontrolnega poligona enake  $(2^{-k}i, p_i^k), i \in \mathbb{Z}$ . Funkcijski primer je prikazan na sliki 2.7. Za primer konstrukcije ravninske krivulje program sprejme vektor  $X$ , ki vsebuje abscise kontrolnih točk in vektor  $Y$ , ki vsebuje njihove ordinate. Oba vektorja se nato delita v razmerju  $\frac{1}{4}$  in  $\frac{3}{4}$ , po pravilih Chaikinovega algoritma. Postopek je prikazan na sliki 2.8. V obeh primerih na levi sliki vidimo začetni kontrolni poligon, na desni sliki prvi korak subdivizije, na spodnji strani pa je prikazana limitna krivulja.



Slika 2.7: Funkcijski primer subdivizije.



Slika 2.8: Krivuljni primer subdivizije.



## Poglavje 3

# Delitev subdivizijskih shem za ploskve

Na podlagi sledečih kriterijev dobimo enostaven način za klasifikacijo večine obstoječih shem.

- Ali temeljijo na štirikotnih ali trikotnih licih,
- Ali so primarnega ali dualnega tipa,
- Ali so aproksimacijske ali interpolacijske.

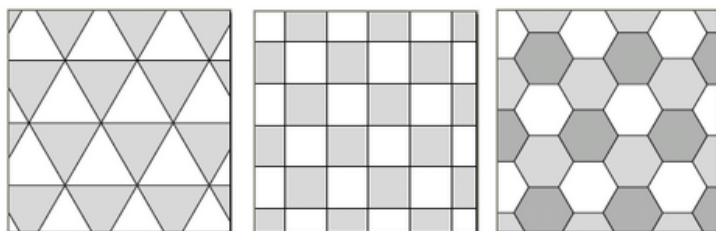
	Primarne		Dualne
	Trikotna mreža	Štirikotna mreža	
Aproksimacijske	Loop-ova shema	Catmull-Clark shema	Doo-Sabinova shema
Interpolacijske	Shema 'Metuljček'	Kobbelt-ova shema	

Slika 3.1: Nekatere znane subdivizijske sheme glede na kriterije.

Poglejmo si natančneje kaj kriteriji pomenijo.

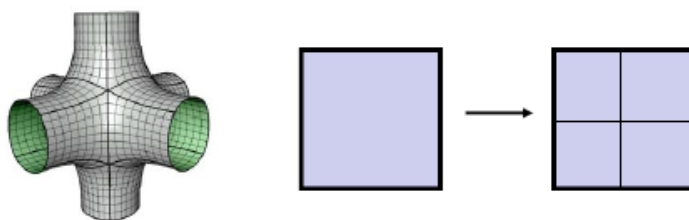
### 3.1 Tip mreže

Začnemo z definiranjem regularne mreže, ki je v domeni parametrično podane ploskve. Regularnost je definirana v zvezi s tlakovanjem ravnine. **Tlakovanje** ravnine je pokritje ravnine z liki, ki jim pravimo **tlakovci**. Ravnino pokrijemo tako, da se tlakovci ne prekrivajo in da med njimi ni presledkov. Obstajajo samo tri regularna tlakovanja: trikotna, štirikotna in šesterokotna, ki jih vidimo na sliki 3.2, vendar so zadnja redko uporabljena. Skoraj vse subdivizijske sheme so razširitve pravil za



Slika 3.2: Regularna tlakovanja. Pridobljeno iz [12].

periodično tlakovanje ravnine. Posamezen korak sheme tipično preslika tlakovanje na gostejše tlakovanje.



Slika 3.3: Tlakovanje preslikamo na gostejše tlakovanje. Pridobljeno iz [2].

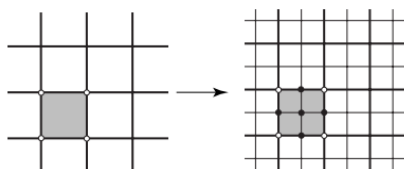


Označimo število povezav v licu z  $e$  in stopnjo vozlišča z  $n$ . **Regularna trikotna mreža** je definirana tako, da imajo vsa lica  $e = 3$  povezave in vsa notranja vozlišča stopnjo  $n = 6$ . Nova mejna (zunanja) vozlišča pa imajo stopnjo  $n = 4$ . Podobno je definirana **regularna štirikotna mreža**, za katero imajo vsa lica  $e = 4$  povezave in vsa notranja vozlišča stopnjo  $n = 4$ . Nova mejna (zunanja) vozlišča pa imajo stopnjo  $n = 3$ .

Če je mreža trikotna, ampak ni regularna trikotna mreža, je vsako vozlišče, kjer je  $n \neq 6$  **neregularno vozlišče** in vsako lice, kjer je  $e \neq 3$ , **neregularno lice**. Podobno za štirikotno mrežo. Vozlišča in lica, ki niso neregularna, so **regularna**.

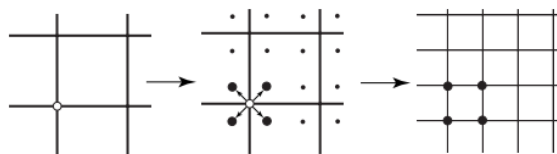
## 3.2 Primarne in dualne sheme

Ko je določeno tlakovanje ravnine, moramo definirati, kako je novo tlakovanje povezano z originalnim tlakovanjem. Imamo dva glavna pristopa za generiranje gostejšega tlakovanja: eno je **delitev lica** in drugo **delitev vozlišča**. Tipično je topološki korak **primarne** sheme opisan kot delitev lica, **dualne** sheme pa kot delitev vozlišča. V prvem primeru je vsako lice trikotne ali štirikotne mreže razdeljeno na štiri dele. Stara vozlišča so ohranjena, nova vozlišča pa so vstavljena na povezave. Za štirikotne mreže je vstavljeno še dodatno vozlišče na vsako lice. V drugem primeru so ustvarjena številna nova vozlišča iz vsakega starega vozlišča.



Slika 3.4: Delitev lica štirikotne regularne mreže. Pridobljeno iz [2].

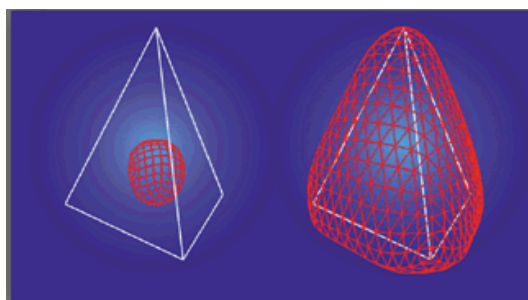
Po eno vozlišče je ustvarjeno za vsako lice, ki je pritrjeno na vozlišče. Novo lice je ustvarjeno za vsako povezavo in stara lica so ohranjena. Dodatno je vsako novo lice ustvarjeno za vsako vozlišče. Za štirikotno tlakovanje so rezultat tega tlakovci, kjer ima vsako vozlišče stopnjo 4. V primeru trikotnega tlakovanja dualnih shem so rezultat šesterokotni tlakovci. V tem pogledu so štirikotni tlakovci nekaj posebnega. Podpirajo primarne in dualne subdivizijske sheme.



Slika 3.5: Delitev vozlišča štirikotne regularne mreže. Pridobljeno iz [2].

### 3.3 Aproksimacijske in interpolacijske sheme

Pomembna karakteristika pri deljenju shem je, ali je shema aproksimacijska ali interpolacijska. Interpolacijske sheme ne spreminjajo kontrolnih točk v vozliščih, posredovanih iz prejšnjega koraka, ampak samo dodajajo nova vozlišča. Originalni položaji vozlišč se ohranijo in so tudi v limitni ploskvi. Aproksimacijske sheme pa po potrebi spreminjajo položaje originalnih vozlišč. Interpolacijske sheme omogočajo lažji nadzor, ker so originalne točke tudi točke limitne površine. Veliko algoritmov lahko zaradi interpolacije tudi poenostavimo. Vseeno je kvaliteta površin, pridobljenih z aproksimacijskimi shemami, višja. Aproksimacijske sheme tudi hitreje konvergirajo kot interpolacijske.

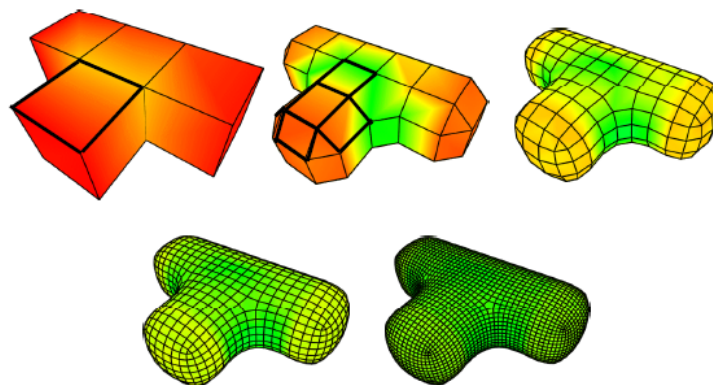


Slika 3.6: Aproksimacijska shema (na levi) in interpolacijska shema (na desni). Pridobljeno iz [21].



## Poglavje 4

# Doo-Sabinova subdivizijska shema

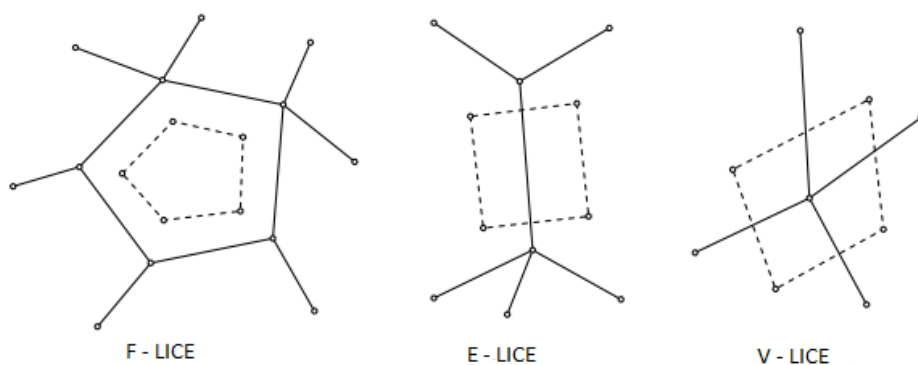


Slika 4.1: Primer Doo-Sabinove sheme. Pridobljeno iz [2].

Doo-Sabinova subdivizijska shema temelji na posplošitvi bikvadratičnih B-zlepkov. Leta 1978 sta jo razvila Daniel Doo in Malcolm Sabin. Opazovala sta obnašanje okrog neregularnih vozlišč z uporabo Fourierjeve transformacije in opazovanjem lastnih vrednosti in lastnih vektorjev subdivizijske matrike. Vzela sta paradigmo, ki jo je razvil George Chaikin in s prilagoditvijo tehnike za bikvadratične B-zlepke razvila novo proceduro. Shema je **dualna**, **aproksimacijska** in temelji na **štirikotni** mreži.

Doo-Sabinova subdivizija je konceptualno zelo preprosta. Ne razlikujemo med sodimi in lihimi vozlišči, zato je ena šablona dovolj, da definiramo shemo. Posebno pravilo potrebujemo samo za robne povezave.

Postopek začnemo s poliedrom, ki ima vozlišča  $V$ , povezave  $E$  in lica  $F$ . Najprej definiramo novo množico vozlišč in nato konstruiramo lica. Lica se razlikujejo po tem, kako jih dobimo. Imamo tri različna lica, ki jih vidimo na sliki 4.2. **F-lice** dobimo tako, da povežemo nova vozlišča, ki ležijo na licu. **E-lice** dobimo tako, da povežemo štiri vozlišča, ki so bila generirana iz končnih točk povezave, za lica, ki so pripeta povezavi. **V-lice** pa dobimo tako, da povežemo vozlišča, ki jih je ustvarilo originalno vozlišče.



Slika 4.2: F-, E- in V-lice.

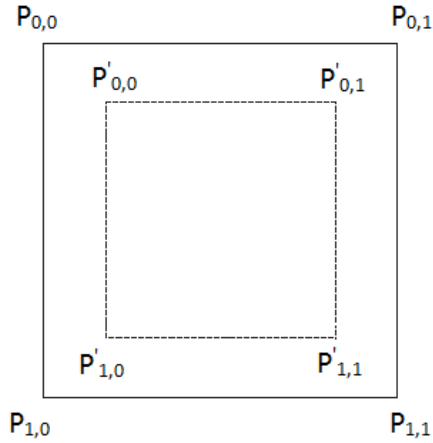
## 4.1 Shema na regularni mreži

Za regularna vozlišča je šablona prikazana na sliki 4.3. Za vsako vozlišče poligona v



Slika 4.3: Šablona za regularna vozlišča Doo-Sabinove sheme.

vsakem koraku subdivizije konstruiramo nova vozlišča. Za konstrukcijo uporabimo zgornjo šablono tako, da vsako vozlišče lica pomnožimo s pripadajočo vrednostjo. Natančneje, naj bo lice poligona sestavljeno iz točk  $P_{0,0}$ ,  $P_{0,1}$ ,  $P_{1,0}$  in  $P_{1,1}$ . Nove točke, ki ustrezajo danemu licu in točkam označimo z  $P'_{0,0}$ ,  $P'_{0,1}$ ,  $P'_{1,0}$  in  $P'_{1,1}$ , kar je prikazano na sliki 4.4.



Slika 4.4: Stare in nove točke lica.

Z uporabo zgornjih šablon jih poračunamo kot:

$$P'_{0,0} = \frac{1}{16}(9P_{0,0} + 3P_{0,1} + 3P_{1,0} + P_{1,1}),$$

$$P'_{0,1} = \frac{1}{16}(3P_{0,0} + 9P_{0,1} + P_{1,0} + 3P_{1,1}),$$

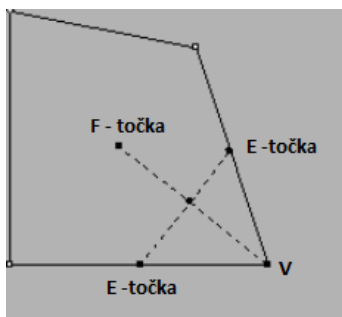
$$P'_{1,0} = \frac{1}{16}(3P_{0,0} + P_{0,1} + 9P_{1,0} + 3P_{1,1}),$$

$$P'_{1,1} = \frac{1}{16}(P_{0,0} + 3P_{0,1} + 3P_{1,0} + 9P_{1,1}).$$

Na vsakem licu tako dobimo štiri nova vozlišča, ki jih različno povežemo, da dobimo različne tipe lic. Postopek pridobivanja novih lic je prikazan na sliki 4.6.

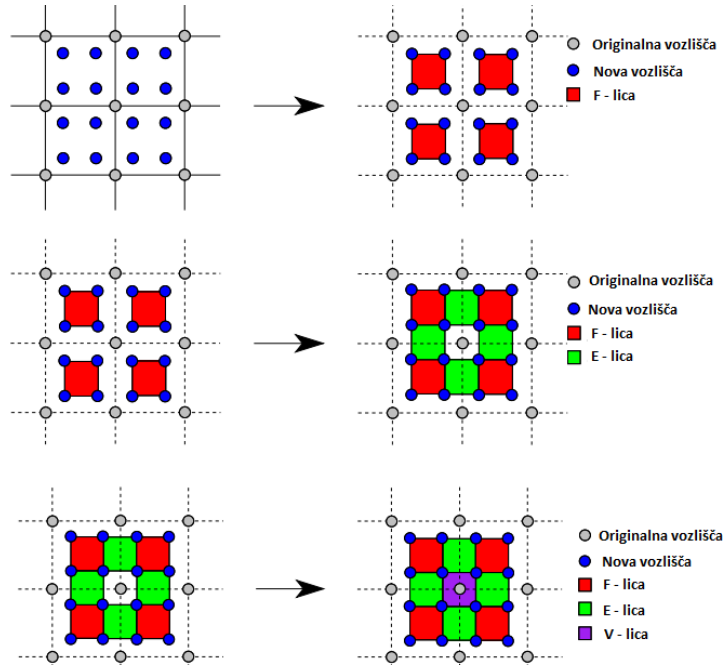
Doo in Sabin sta opazovala, da so nova vozlišča povprečje štirih točk poligona (slika 4.5):

- Vozlišče V, za katerega konstruiramo novo vozlišče,
- Dva E - vozlišča, ki sta središčni točki skupnih povezav vozlišča in lica,
- F - vozlišče, ki je v središču lica.



Slika 4.5: Novo vozlišče kot povprečje štirih točk. Pridobljeno iz [11]





Slika 4.6: Konstrukcija novih lic v primeru regularnih vozlišč. Pridobljeno iz [17].

Eden od izzivov je bil sprogramirati predstavljeno subdivizijsko shemo na regularnih mrežah. Začetna poligonska mreža naj sestoji iz točk  $p_{i,j} \in \mathbb{R}^3, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ , pri čemer naj velja, da je stopnja vsake notranje točke enaka 4, točke  $p_{i-1,j}, p_{i+1,j}, p_{i,j-1}$  in  $p_{i,j+1}$  pa so sosednje točke od  $p_{i,j}$ . V okolju Matlab je taka poligonska mreža podana s trojico matrik  $X, Y, Z$ , katerih elementi predstavljajo koordinate kontrolnih točk. Natančneje  $p_{ij} = (X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij})$ . Osnovni ukaz za risanje mreže, uporabljen v programu je  $mesh(X, Y, Z)$ , ki nariše mrežo skozi elemente matrike v takem vrstnem redu, kot so elementi v matriki. Zanima nas, kako iz začetne matrike kontrolnih točk dobiti novo matriko kontrolnih točk. Zanima nas tudi, ali računati robna vozlišča in jih obdržati v novi matriki. Novo matriko označimo z  $D \in \mathbb{R}^{2(m-1) \times 2(n-1)}$  in zanjo v programu najprej rezerviramo prostor. Odločimo se, da bomo v novi matriki  $D$  robna vozlišča izpustili in računali samo notranja vozlišča stare matrike  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  po naslednjem postopku:

$$D \in \mathbb{R}^{2(m-1) \times 2(n-1)},$$

**for** i=1:m-1

**for** j=1:n-1

$$D(2*i-1, 2*j-1) = 1/16*(9*X(i, j) + 3*X(i, j+1) + 3*X(i+1, j) + X(i+1, j+1));$$

$$D(2*i, 2*j-1) = 1/16*(9*X(i+1, j) + 3*X(i, j) + 3*X(i+1, j+1) + X(i, j+1));$$

$$D(2*i, 2*j) = 1/16*(9*X(i+1, j+1) + 3*X(i, j+1) + 3*X(i+1, j) + X(i, j));$$

$$D(2*i-1, 2*j) = 1/16*(9*X(i, j+1) + 3*X(i, j) + 3*X(i+1, j+1) + X(i+1, j));$$

**end**

**end**

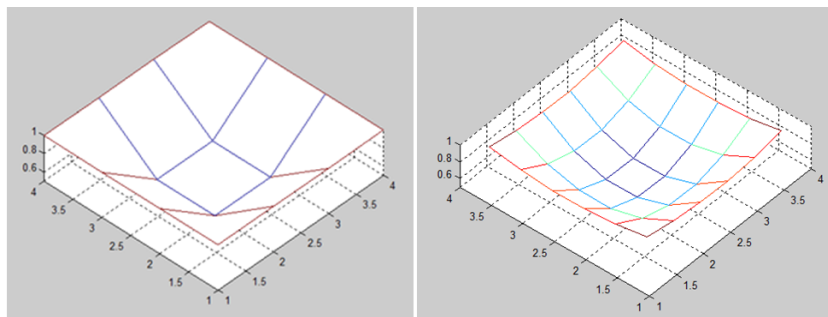
To računamo za trojico matrik X, Y, Z.

Na slikah 4.7 - 4.12 je prikazan primer, kjer so uporabljene začetne matrike

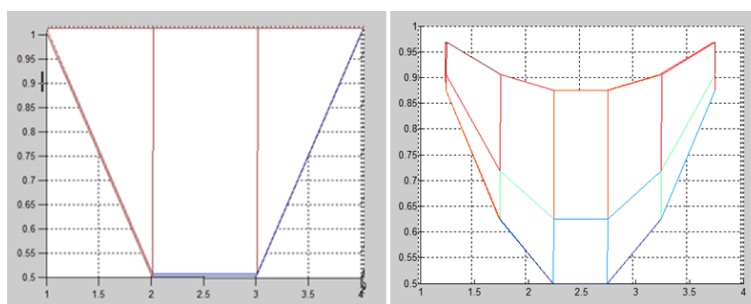
$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Začetni kontrolni poligon in poligon po prvem koraku subdivizije iz dveh različnih zornih kotov je prikazan na slikah 4.7 in 4.8.

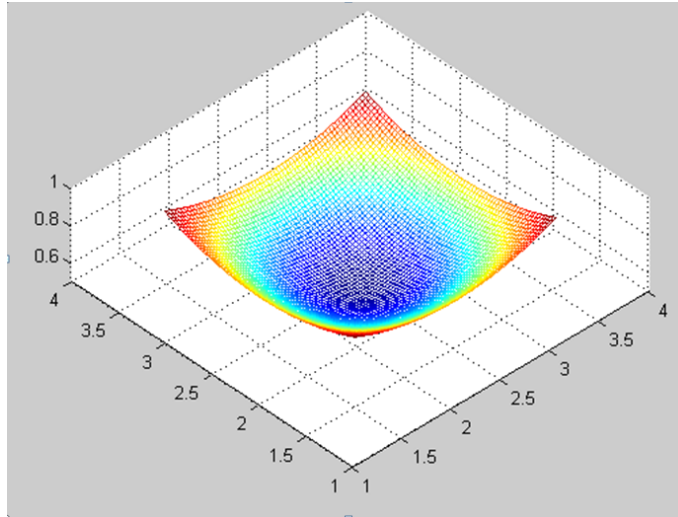
Po petih korakih subdivizije dobimo ploskev, ki je na slikah 4.9 in 4.10. Po osmih korakih subdivizije, ki je prikazana na slikah 4.11 in 4.12, pa dobimo že skoraj gladko ploskev, ki dobro aproksimira začetni kontrolni poligon. Poligon zelo hitro skonvergira k limitni ploskvi. Problem, ki ga shema povzroča pa je predvsem prostorska zahtevnost. V konkretnem primeru smo začeli z matrikami velikosti  $4 \times 4$ . Po enem koraku se je matrika povečala na  $8 \times 8$ . Po osmih korakih pa na  $2^8 * 3 \times 2^8 * 3$ . Torej po  $k$  korakih iz  $m \times n$  na  $2^k(m-1) \times 2^k(n-1)$ .



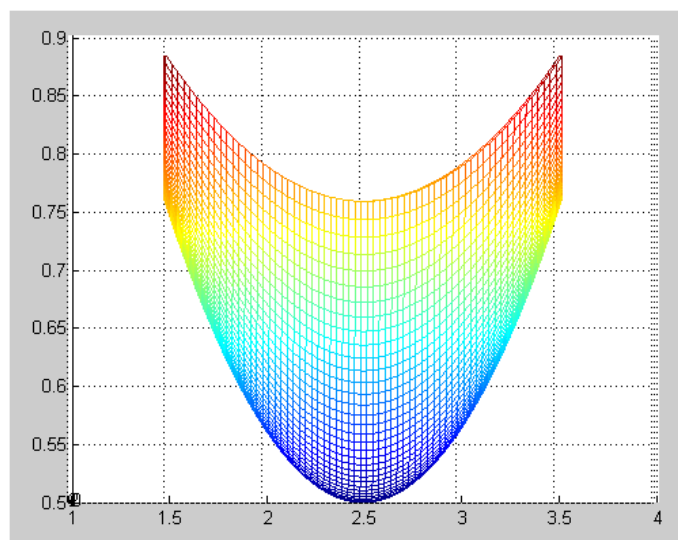
Slika 4.7: Začetni kontrolni poligon (na levi) in prvi korak subdivizije (na desni).



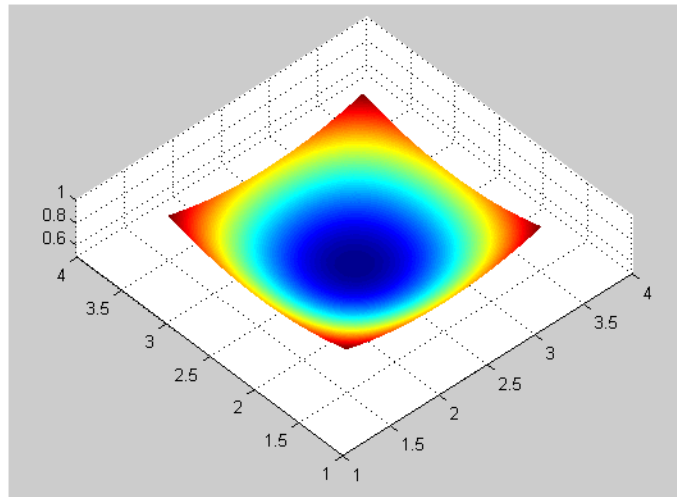
Slika 4.8: Začetni kontrolni poligon (na levi) in prvi korak subdivizije (na desni) iz drugega zornega kota.



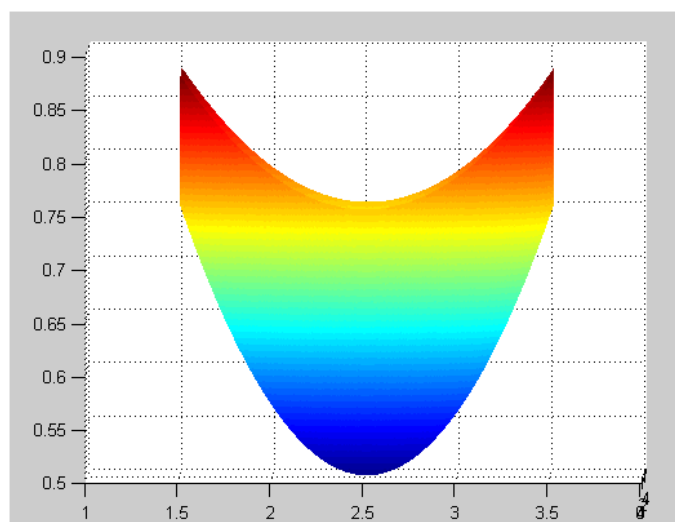
Slika 4.9: Po petih korakih subdivizije.



Slika 4.10: Po petih korakih subdivizije iz drugega zornega kota.



Slika 4.11: Po osmih korakih subdivizije



Slika 4.12: Po osmih korakih subdivizije iz drugega zornega kota.

## 4.2 Shema na neregularni mreži

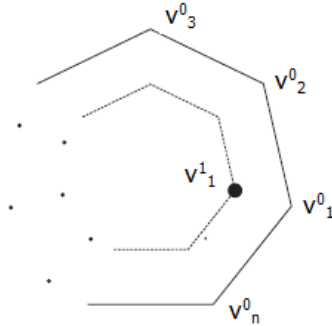
Postopek konstrukcije lic pri neregularni mreži je podoben kot pri regularnem primeru. Razlika je v šabloni, ki se uporablja za računanje novih vozlišč pri neregularnih licih. Imamo vozlišča lica  $v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \dots, v_n^{(0)}$ , ki ni regularno, to je  $n \neq 4$ . Novo množico vozlišč za to lice dobimo z iteracijsko shemo

$$v_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j^{(0)}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.1)$$

kjer so koeficienti  $a_{ij}$  dani kot

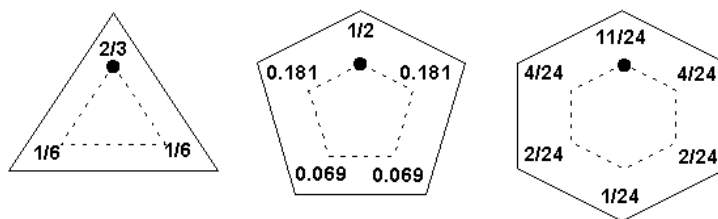
$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{5}{4n}, & i = j \\ \frac{3 + 2\cos(\frac{2(i-j)\pi}{n})}{4n}, & i \neq j \end{cases}. \quad (4.2)$$

Ko izračunamo nova vozlišča, konstruiramo lica na enak način kot pri regularni



Slika 4.13: Šablona za neregularno mrežo.

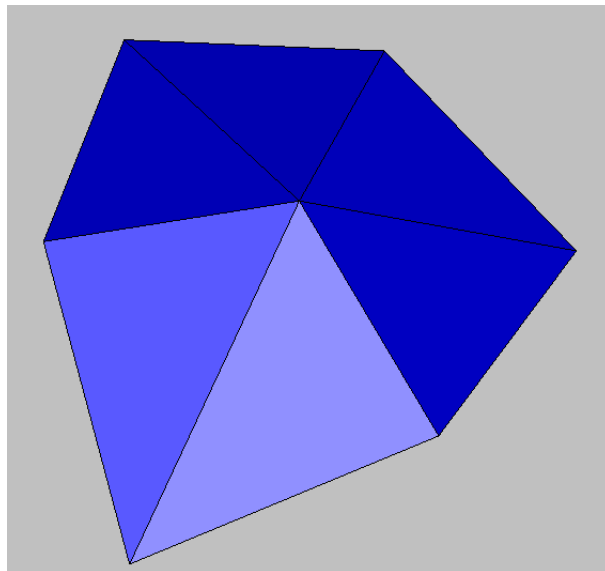
mreži (slika 4.6), le da tu nimamo samih štirikotnikov, ampak imamo lica, ki imajo večjo množico povezav. Vsako lice originalnega poligona generira novo lice. Tudi vsaka povezava in vsako vozlišče generira novo lice. Število vozlišč, ki so konstruirana za vsako lice je enako številu vozlišč originalnega lica. To pomeni, da je končno število konstruiranih točk večje, kot originalno število točk, saj vsako vozlišče pripada več kot enemu licu.



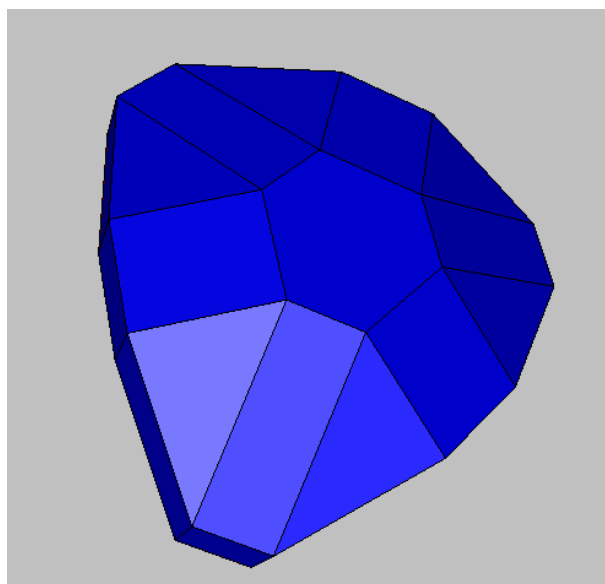
Slika 4.14: Nekatere izračunane vrednosti za neregularna lica po enačbi (4.1). Pridobljeno iz [20].

Za praktični prikaz sheme na neregularnih vozliščih sem si pomagala z orodjem za 3D modeliranje MeshMan ([9]). V orodje lahko uvozimo dokument tipa *.obj* in nato izvedemo poljubno subdivizijsko shemo, med drugim tudi Doo-Sabinovo. V orodje sem uvozila objekte, pridobljene iz [3].

Začela sem z objektom na sliki 4.15. Na primeru je dobro razvidno, da se število neregularnih vozlišč ne veča. Narašča število štirikotnih lic med neregularnimi vozlišči, tako da izgleda kot da so neregularna vozlišča izolirana.

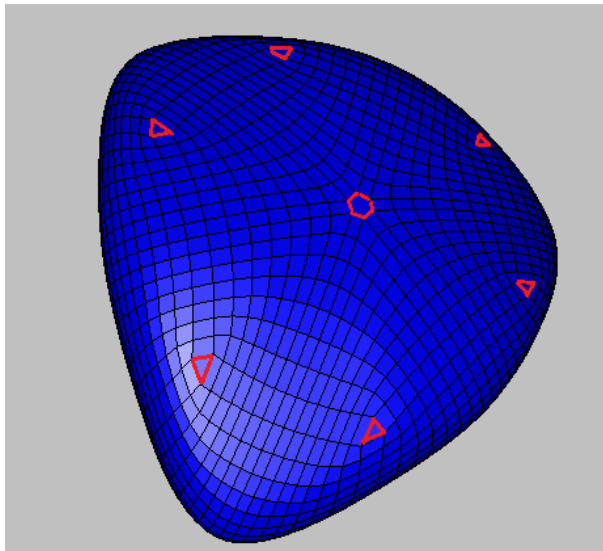


Slika 4.15: Začetni objekt.



Slika 4.16: Objekt po enem koraku subdivizije.





Slika 4.17: Objekt po petih korakih subdivizije.



# Literatura

- [1] Lars-Erik Andersson and N Neil Frederick Stewart. *Introduction to the mathematics of subdivision surfaces*. SIAM, 2010.
- [2] Mirela Ben-Chen. Subdivision surfaces. University Lecture, 2010. [http://graphics.stanford.edu/courses/cs468-10-fall/LectureSlides/10\\_Subdivision.pdf](http://graphics.stanford.edu/courses/cs468-10-fall/LectureSlides/10_Subdivision.pdf), Zadnji dostop: 10.09.2014.
- [3] John Burkardt. <http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/data/obj/obj.html>, Zadnji dostop: 10.09.2014.
- [4] Edwin Catmull and James Clark. Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer-aided design*, 10(6):350–355, 1978.
- [5] Brian Curless. Subdivision curves and surfaces. University Lecture, 2004. <https://courses.cs.washington.edu/courses/cse457/04sp/lectures/subdivision.pdf>, Zadnji dostop: 10.09.2014.
- [6] Daniel Doo and Malcolm Sabin. Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points. *Computer-Aided Design*, 10(6):356–360, 1978.
- [7] Nira Dyn. Subdivision schemes in cagd. *Advances in numerical analysis*, 2:36–104, 1992.
- [8] S.S. Goh, A. Ron, and Z. Shen. *Mathematics and Computation in Imaging Science and Information Processing*. World Scientific Publishing Company, Incorporated, 2007.
- [9] Ryan Holmes. [href=http://www.holmes3d.net/graphics/meshman/](http://www.holmes3d.net/graphics/meshman/), Zadnji dostop: 10.09.2014.

- 
- [10] Ken Joy. Doo-sabin surfaces. University Lecture, 2000. <https://www.cs.unc.edu/~dm/UNC/COMP258/LECTURES/Chaikins-Algorithm.pdf>, Zadnji dostop: 10.09.2014.
  - [11] Ken Joy. Doo-sabin surfaces. University Lecture, 2000. <https://www.cs.unc.edu/~dm/UNC/COMP258/LECTURES/Doo-Sabin.pdf>, Zadnji dostop: 10.09.2014.
  - [12] Craig Kaplan. The trouble with five. <http://plus.maths.org/content/trouble-five>, Zadnji dostop: 10.09.2014.
  - [13] Marjeta Krajnc. *Subdivizijske sheme, Diplomsko delo*. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, 2002.
  - [14] David L. Finn. Doo-sabin and catmull-clark surfaces. Lecture, 2004. <https://www.rose-hulman.edu/~finn/CCLI/Notes/day37.pdf>, Zadnji dostop: 10.09.2014.
  - [15] Barry McQuarrie. Tilings. Lecture, 2010. <http://facultypages.morris.umn.edu/~mcquarrb/teachingarchive/M1001/Resources/Lecture20a.pdf>, Zadnji dostop: 10.09.2014.
  - [16] Charles A Micchelli and Ewald Quak. *Mathematical aspects of geometric modeling*. SIAM, 1995.
  - [17] Nassim Mohamad Jibai. A library for implementing and using sequential and distributed recursive subdivision surfaces. <http://maverick.inria.fr/Membres/Nassim.Jibai/docs/thesis.pdf>, Zadnji dostop: 10.09.2014.
  - [18] Hartmut Prautzsch and Leif Kobbelt. Convergence of subdivision and degree elevation. *Advances in Computational Mathematics*, 2(1):143–154, 1994.
  - [19] Malcolm Arthur Sabin. *Analysis and design of univariate subdivision schemes*, volume 6. Springer, 2010.
  - [20] Carlo Sequin. Computer aided geometric design. <http://www.cs.berkeley.edu/~sequin/CS284/LECT09/L11.html>, Zadnji dostop: 10.09.2014.

- 
- [21] Brian Sharp. Subdivision surface theory. [http://www.gamasutra.com/view/feature/131585/subdivision\\_surface\\_theory.php?print=1](http://www.gamasutra.com/view/feature/131585/subdivision_surface_theory.php?print=1), Zadnji dostop: 10.09.2014.
- [22] Wikipedia. Subdivision surface — wikipedia, the free encyclopedia, 2014. [http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Subdivision\\_surface&oldid=619735237](http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Subdivision_surface&oldid=619735237), Zadnji dostop: 10.09.2014.
- [23] Denis Zorin. Subdivision for modeling and animation. *Subdivision for modeling and animation*, 1999. <http://www.multires.caltech.edu/pubs/sig00notes.pdf>, Zadnji dostop: 10.09.2014.
- [24] Denis Zorin and Peter Schröder. A unified framework for primal/dual quadrilateral subdivision schemes. *Computer Aided Geometric Design*, 18(5):429–454, 2001.